NUMERICKÉ METÓDY – I
NUMERICAL METHODS - I

Dušan Maga

Fakulta mechatroniky TnUAD, Študentská 1, 911 50 Trenčín
maga@yhman.tnuni.sk

Abstrakt Prezentovaný článok čerpá zo skúseností autora v oblasti numerických metód riešenia polí, prevažne magnetických. Úlohou tohto článku, ako prvého z pripravovanej série, je oboznámiť čitateľa s matematickým aparátom a základnými fyzikálnymi princípmi, ako aj s potenciálnymi nedostatkami resp. výhodami pri použití Metódy konečných diferencií (MKD).

Summary Presented paper is based on authors experience on numerical methods of field solution, mostly magnetic. This paper, as the first one of prepared series, deals with mathematical apparatus and basic physical principles, as well as with possible short-comings or advantages when using the Finite Difference Method (FDM).

1. ÚVOD

Od počiatkov vývoja a histórie technicky zameraných vedných disciplín je prvotným zámerom konštruktéra nájsť systém, na základe ktorého je možné popísať, navrhnúť a overiť správanie sa a charakteristiky skonštruovaného technického zariadenia. Veľmi široké množstvo takýchto úloh je možné v teoretickej rovine popísať sústavou diferenciálnych rovníc. Napríklad pre elektrické deje a magnetizmus je to sústava rovníc, ktorá popisuje divergenciu a gradient veličín charakterizujúcich príslušné skúmané polia - Maxwellove rovnice. Podobne je to aj u iných fyzikálnych disciplín, kde možno ľahko nájsť analógiu na základe Maxwellových rovníc [1]. Problematickým je však riešenie týchto rovníc v reálnom priestore (3D) resp. v reálnej rovine (2D) a v reálnom čase. Pre jednoduché úlohy je možné riešenie „presné“, t. j. analytické, pre komplikovanejšie úlohy je však nutné siahnuť k metódam numerickým. Od počiatočného impulzu rozvoja numerických metód (podmieneného rozvojom dostupnej a relatívne výkonnej výpočtovej techniky) sa do popredia dostávajú tri z nich a to Metóda konečných diferencií (Finite Difference Method – FDM), Metóda konečných prvkov (Finite Element Method – FEM) a Metóda hraničných prvkov (Boundary Element Method – BEM). Autor si kladie za cieľ oboznámiť širokú verejnosť so základnými princípmi spomínaných metód, keďže väčšina konzumentov týchto metód síce aktívne využíva ich výsledky, avšak neovláda princípy ich správania sa. Postupne budú prezentované základy všetkých troch spomenutých metód, na začiatok bude reč o najjednoduchšej z nich – Metóde konečných diferencií.

Treba ešte poznamenať, že napriek širokým možnostiam využitia a analógie fyzikálnych disciplín sa budeme venovať hlavne problematike elektrických a magnetických dejov. Zavedieme aj ďalšie zjednodušenia a to hlavne zanedbáme časovú zmenu veličín a budeme brať do úvahy len riešenie úloh v 2D. Riešenie budeme hľadať výhradne v karteziánskej súradnicovej sústave a nebudeme uvažovať o takých prípadoch symetrie, ktoré je výhodnejšie riešiť v sústave cylindrickej alebo polárnej.

2. STATICKÉ POLIA V 2D

Podľa typu riešenej úlohy a požadovaných primárnych výsledkov dostávame z Maxwellových rovníc predpis pre riešenie skalárneho, vektorového alebo redukovaného skalárneho potenciálu. Bez ohľadu na vyššie uvedené, dostávame sa k zdanlivo jednoduchej rovnici, ktorú môžeme zovšeobecniť nasledovnou formuláciou:

$$\nabla \cdot \kappa \nabla \mathrm{U} + \mathrm{Q} = 0 \tag{1}$$

kde U je hľadaná veličina, κ materiálový parameter (môže byť konštantný ako aj závislý na riešení U) a Q je parameter zachytávajúci vplyv zdrojov poľa. Treba ešte spomenúť nutnosť znalostí a zakomponovania pravidiel prechodu poľa rozhraním dvoch materiálov ako aj pravidiel „ukončenia“ riešenej oblasti (okrajové podmienky). Viac o týchto sa čitateľ dozvie napríklad v [1].

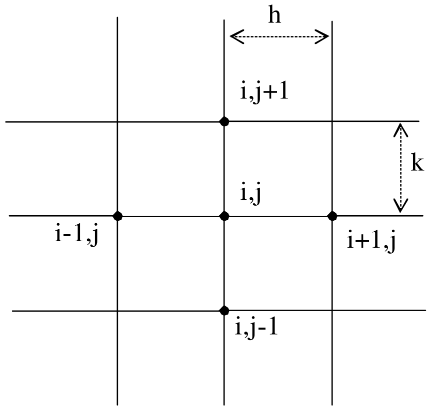
Pokúsme sa nájsť podmienky, na základe ktorých by sa rovnica (1) mohla upraviť na pohodlnejšiu formu. Prvou podmienkou, ktorá sa priam natíska, je neprítomnosť zdrojov poľa, t. j. $Q = 0$. Ďalšou možnosťou je odstránenie divergencie gradientu. Objaví sa (skalárny) Laplaceov operátor. Tento krok je možné uskutočniť za predpokladu, že materiálový parameter κ je konštantný. Dostávame rovnicu:

$$\nabla^2 \mathrm{U} = 0 \tag{2}$$

Z predchádzajúceho postupu vyplýva ešte jeden zaujímavý fakt, ktorý je vhodné pri tejto príležitosti spomenúť. Pokiaľ nie sú v riešenej oblasti zdroje poľa a materiál riešenej oblasti je homogénny s lineárnou charakteristikou, nie je dôležité aká konkrétna je tá charakteristika. bez ohľadu na hodnotu κ táto z rovnice (2) vypadáva, t. j. pre ľubovolný lineárny materiál dostávame jedno a to isté riešenie.

3. METÓDA KONEČNÝCH DIFERENCIÍ

Metóda konečných diferencií bola používaná na výpočet elektromagnetických polí všetkých typov s obrovským úspechom. Metóda sama o sebe je veľmi jednoduchá a hrá podstatnú úlohu v rozvoji numerických metód. Jej počiatky v elektromagnetizme sa datujú na prelom šesťdesiatych a sedemdesiatych rokov, dodnes existujú rozličné verzie metódy, upravené hlavne o možnosti definovanie zložitejších geometrií a pod.
Tak ako aj pri iných metódach, jej výsledkom je numerické riešenie základnej rovnice systému alebo matematického modelu. Rovnica (2) je vlastne spojitá parciálna diferenciálna rovnica platná vo všetkých oblastiach riešenej domény. Jej riešenie sa však podstatne zjednoduší, ak bude požadované len v konečnom počte strategicky zvolených bodov úlohy. Tieto musia byť zvolené tak, aby vhodným spôsobom reprezentovali geometrické a iné podmienky pôvodnej úlohy.
Definujme v zvolenej súradnicovej sústave čiary rovnobežné z osami súradnicovej sústavy podľa obr. 1. Tieto sa budú pretínať pod pravým uhlom v uzloch siete, v ktorých Metóda konečných diferencií



Obr. 1 – Sieť Metódy konenčých diferencií
Fig. 1 – Finite Difference mesh

hľadá riešenie daného problému.

Princíp Metódy konečných diferencií spočíva v náhrade jednotlivých derivácií diferenciáciou hľadanej veličiny. Výsledná hodnota v jednotlivých bodoch (i,j) je ovplyvnená hodnotami susedných bodov (i-1,j) a (i+1,j) pre parciálne derivácie v smere „x“-ovej osi, respektívne (i,j-1) a (i,j+1) pre parciálne derivácie v smere osi „y“. Aj keď je systém v podstate veľmi jednoduchý, nie je v silách dostupnej výpočtovej techniky realizovať všeobecný predpis riešenia. Je potrebné urobiť ešte ďalší reštrikčný zásah do geometrie riešenia a to definovať nutnosť rovnomerného rozdelenia skúmanej oblasti (toto je jeden z hlavných nedostatkov metódy!).
Pripomeňme si ešte raz rovnicu, ktorú ideme za daných predpokladov vyriešiť:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=-\frac{Q}{\kappa}=0 \qquad (3)$$

Z rovnice (3) vyplýva, že dôležitým faktorom je linearita materiálovej charakteristiky – neprítomnosť poľa je len „kozmetickým“ prvkov.
Pri prepise rovnice (3) na bod siete (i,j) použijeme pravidlá rozvoja Taylorovho radu pre dve premenné:

$$U(x+h)=U(x)+hU'(x)+\frac{1}{2}h^2U''(x)+ \\ +\frac{1}{6}h^3U'''(x)+\ldots \qquad (4)$$

$$U(x-h)=U(x)-hU'(x)+\frac{1}{2}h^2U''(x)- \\ -\frac{1}{6}h^3U'''(x)+\ldots \qquad (5)$$

Pri prepise rovníc (4) a (5) do nami definovanej diskretizačnej schémy logicky dostávame:

$$U_{i+1,j}=U_{i,j}+hU'_{i,j}+\frac{1}{2}h^2U''_{i,j}+\frac{1}{6}h^3U'''_{i,j}+\ldots \qquad (6)$$

$$U_{i-1,j}=U_{i,j}-hU'_{i,j}+\frac{1}{2}h^2U''_{i,j}-\frac{1}{6}h^3U'''_{i,j}+\ldots \qquad (7)$$

Je zrejmé, že v predchádzajúcich rovniciach sa jedná o parciálne derivácie veličiny *U* podľa smeru posunu indexov *i* a *j* – t. j. v tomto prípade v smere *x*-ovej súradnice. Spočítaním rovnice (6) a (7) dostávame:

$$U_{i+1,j}+U_{i-1,j}=2U_{i,j}+h^2U''(x)+O\left(h^4\right) \qquad (8)$$

kde $O(h^4)$ je zvyšok z Taylorovho rozvoja s výskytom štvrtých a vyšších mocnín *h*. Logicky bude riešenie úlohy tým presnejšie, čím jemnejšia bude diskretizácia skúmanej oblasti, t. j je predpoklad že *h* a tým aj príslušné vyššie mocniny *h* sú zanedbateľne malé. Zanedbaním $O(h^4)$dostávame:

$$U''_{i,j}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\frac{U_{i+1,j}-2U_{i,j}+U_{i-1,j}}{h^2} \qquad (9)$$

Podobným postupom je možné dopracovať sa k predpisu pre nahradenie parciálnej derivácie diferenciáciou v smere súradnicovej osi *y*:

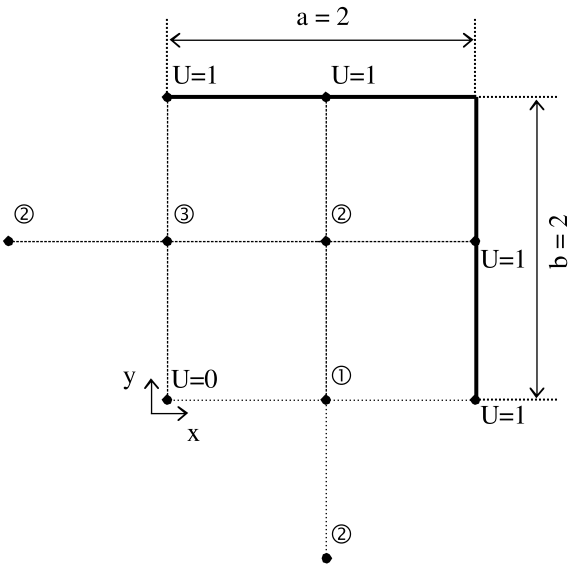
$$U''_{i,j} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{k^2} \qquad (10)$$

Dosadením (9) a (10) do rovnice (3) dostávame:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h^2}\left(U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}\right) + \\ &+ \frac{1}{k^2}\left(U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}\right) = -\frac{Q}{\kappa} \end{aligned} \qquad (11)$$

Takto formulovaný predpis je možné priamo použiť k formulovaní sústavy rovníc, ktorá štandartne vedie k maticovému zápisu, kde hlavná matica systému je vždy štvorcová a jej šírka je rovná počtu uzlov siete.

4. PRÍKLAD POUŽITIA MKD



Obr. 2 – Príklad Metódy konenčých diferencií
Fig. 2 – Finite difference example

Definujme úlohu v ktorej sa nevyskytujú zdroje poľa a kde materiálový parameter κ je konštantný. Môže ňou byť napríklad aj prierez štvorcového koaxiálneho vodiča, kde sú definované hodnoty potenciálu U = 0 (0%) v strede vodiča a U = 1 (100%) na povrchu. Kvôli symetrii je nutné analyzovať len jeden zo štyroch kvadrantov. Na obrázku 2 je vidieť prvý kvadrant riešenej úlohy s delením *h* = *k* = 1. Pre 9 takto vzniknutých bodov je už vopred známy výsledok a to na základe okrajových podmienok spomenutých v predchádzajúcom texte, ostáva vypočítať hodnoty potenciálu *U* vo zvyšných troch bodoch siete. Dôležitým faktorom je aj predpokladaná kolmosť poľa na vnútorných hranách v prvom kvadrante úlohy (osi *x* a *y*). Kolmosť sa v tomto prípade zabezpečí zrkadlením najbližších susedov pozdĺž príslušnej osi (v tomto prípade je to zhodou okolností pre obe osi bod „2“). Takže pre *Q* = 0, *h* = *k* = 1 na základe (11) dostávame pre bod „1“:

$$(0 - 2U_1 + 1) + (U_2 - 2U_1 + U_2) = 0 \qquad (12)$$

Pre bod „2“ platí:

$$(U_3 - 2U_2 + 1) + (U_1 - 2U_2 + 1) = 0 \qquad (13)$$

A konečne pre bod „3“ dostávame:

$$(U_2 - 2U_3 + U_2) + (0 - 2U_3 + 1) = 0 \qquad (14)$$

Takto formulovaná úloha právom zvádza k zápisu vo forme matíc:

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (15)$$

Riešenie sústavy 3 × 3 je veľmi jednoduché, otázna je však presnosť dosiahnutých výsledkov. Ako ju možno zlepšiť a v čom sú hranice vylepšovania by malo byť na základe tohto článku viac-menej jasne definované. Postupným zjemňovaním siete narastá počet uzlov a tým aj rozmer matice zo vzťahu (15), napriek tomu je do určitých rozmerov presné riešenie systému (napr. Gaussova eliminačná metóda) dostupné.

5. ZÁVER

V rámci predstavovania troch najbežnejších metód sme poukázali na možnosti implementácie konečných diferencií do systému riešenia úloh charakterizovaných diferenciálnymi rovnicami. Výhody respektíve nevýhody takéhoto postupu sa dajú sumarizovať nasledovne:

\+ jednoduchá diskretizačná schéma,
\+ štruktúra matice s množstvom nulových prvkov,
\+ jednoduchá aplikácia okrajových podmienok,

\- zanedbanie zvyšku $O(h^4)$,
\- nutnosť použitia pravidelnej diskretizačnej schémy,
\- bez podpory adaptívneho sieťovania.

LITERATÚRA

[1] D. Maga, R. Harťanský: Numerické metódy riešenia elektromechanických úloh, Trenčianska univerzita, Ľudoprint Trenčín, 2001, ISBN 80-88914-29-9

[2] K. J. Binns, P. J. Lawrenson, C. W. Trowbridge: The Analytical and Numerical Solution of Electric and Magnetic Fields, Wiley Publishers, 1992, ISBN 0-471-96242-2

[3] D. Maga, W. Demski: The Accuracy of FEM - FDM Magnetic Field Solution Based Torque Computation, 7th international IGTE Symposium on Numerical Field Calculation in Electrical Engineering, pp. 395-398, 23.-25.9. 1996, Graz, Rakúsko

[4] D. Mayer, J. Polák: Metódy řešení elektrických a magnetických polí, SNTL Alfa Praha, 1993

[5] H. J. Bartsch: Matematické vzorce, SNTL Praha, 1993

[6] J. Polák: Variační principy a metody teorie elektromagnetického pole, Academia Praha, 1988

[7] Rektorys: Variační problémy v inženýrskych úlohách a úlohách matematické fyziky, SNTL Praha, 1974